

3. DERIVACE FUNKCE

- 3.7 Funkce rostoucí a klesající, extrémny funkce
- 3.8 Funkce konvexní a konkávní, inflexní body
- 3.9 Asymptoty grafu funkce
- 3.10 Průběh funkce

Mgr. BLANKA MORÁVKOVÁ, Ph.D.

Dlouhý, Oldřich – Tryhuk, Václav: *Matematika I, Diferenciální počet funkce jedné reálné proměnné*, Akademické nakladatelství CERM, s.r.o. Brno, 2018. ISBN: 978-80-7204-982-0

3.7 Funkce rostoucí a klesající, extrémny funkce

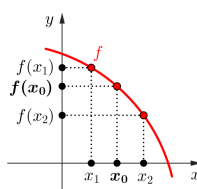
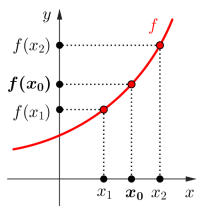
Definice

Funkce f je **rostoucí v bodě** x_0 , existuje-li okolí $\mathcal{U}(x_0) \subset D(f)$ takové, že

- 1) $\forall x_1 \in \mathcal{U}(x_0), x_1 < x_0 : f(x_1) < f(x_0)$,
- 2) $\forall x_2 \in \mathcal{U}(x_0), x_2 > x_0 : f(x_2) > f(x_0)$.

Funkce f je **klesající v bodě** x_0 , existuje-li okolí $\mathcal{U}(x_0) \subset D(f)$ takové, že

- 1) $\forall x_1 \in \mathcal{U}(x_0), x_1 < x_0 : f(x_1) > f(x_0)$,
- 2) $\forall x_2 \in \mathcal{U}(x_0), x_2 > x_0 : f(x_2) < f(x_0)$.



3.7 Funkce rostoucí a klesající, extrémny funkce

Věta

Má-li funkce f v bodě x_0 derivaci

- $f'(x_0) > 0$, pak je funkce f v bodě x_0 **rostoucí**,
- $f'(x_0) < 0$, pak je funkce f v bodě x_0 **klesající**.

Věta

Je-li funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$ a má-li v intervalu $\langle a, b \rangle$ derivaci

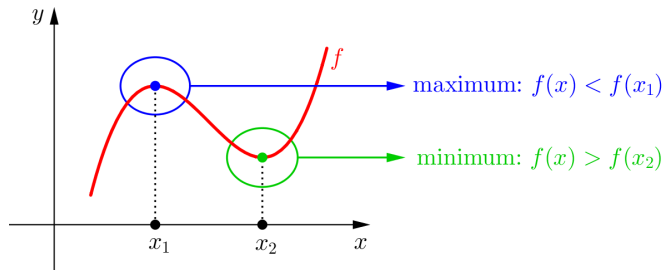
- $f'(x) > 0$, pak je funkce f **rostoucí na intervalu** $\langle a, b \rangle$,
- $f'(x) < 0$, pak je funkce f **klesající na intervalu** $\langle a, b \rangle$.

3.7 Funkce rostoucí a klesající, extrémů funkce

Definice

Funkce f má v bodě $x_0 \in D(f)$ ostré **lokální minimum**, resp. ostré **lokální maximum**, jestliže existuje okolí $\mathcal{P}(x_0, \delta) \subset D(f)$ tak, že pro všechna $x \in \mathcal{P}(x_0, \delta)$ platí $f(x) > f(x_0)$, resp. $f(x) < f(x_0)$.

Ostré lokální maximum a minimum nazýváme ostré **lokální extrémů**.

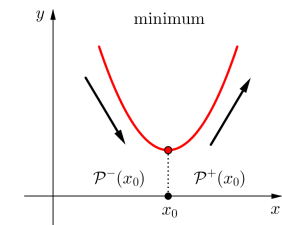
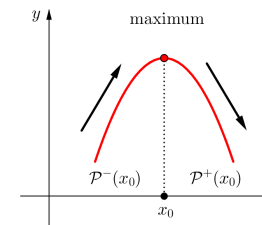


3.7 Funkce rostoucí a klesající, extrémů funkce

Věta

Je-li funkce f spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ a existuje-li prstencové okolí $\mathcal{P}(x_0, \delta)$ takové, že f je

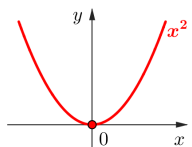
- v $\mathcal{P}^-(x_0, \delta)$ rostoucí a v $\mathcal{P}^+(x_0, \delta)$ klesající, pak má f v bodě x_0 ostré lokální maximum,
- v $\mathcal{P}^-(x_0, \delta)$ klesající a v $\mathcal{P}^+(x_0, \delta)$ rostoucí, pak má f v bodě x_0 ostré lokální minimum.



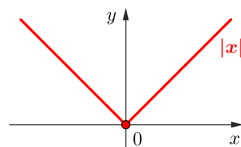
3.7 Funkce rostoucí a klesající, extrémů funkce

Funkce f může mít lokální extrémů

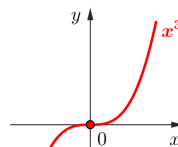
- v bodech, v nichž $f'(x_0) = 0$... **stacionární body**,
- v bodech, v nichž f nemá derivaci.



$f'(x_0) = 0$



$f'(x_0) \nexists$



$f'(x_0) = 0$

3.7 Funkce rostoucí a klesající, extrémů funkce

Věta

Je-li $f'(x_0) = 0$ a má-li funkce f v bodě x_0 druhou derivaci $f''(x_0) \neq 0$, pak má funkce f v bodě x_0 ostrý lokální extrém a to

- ostré lokální maximum, je-li $f''(x_0) < 0$,
- ostré lokální minimum, je-li $f''(x_0) > 0$.

Příklad 3.12

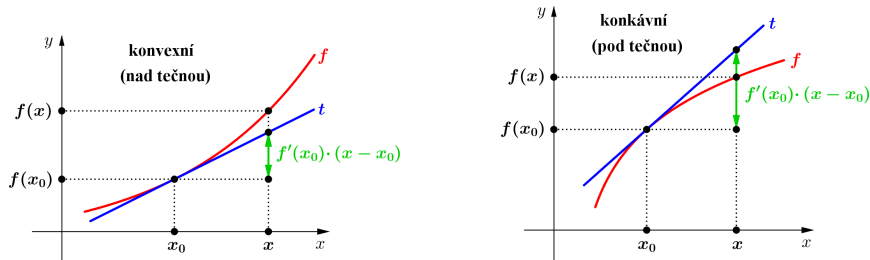
Určete intervaly monotonie a lokální extrémů funkce $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

3.8 Funkce konvexní a konkávní, inflexní body

FAST

Definice

Má-li funkce f derivaci v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, pak řekneme, že f je v bodě x_0 ryze **konvexní**, resp. ryze **konkávní**, jestliže existuje okolí $\mathcal{P}(x_0, \delta)$ takové, že pro všechna $x \in \mathcal{P}(x_0, \delta)$ platí $f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, resp. $f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, tj. graf funkce f leží v $\mathcal{P}(x_0, \delta)$ nad tečnou, resp. pod tečnou, sestrojenou v bodě $[x_0, f(x_0)]$.



3.8 Funkce konvexní a konkávní, inflexní body

FAST

Věta

Má-li funkce f v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ druhou derivaci $f''(x_0)$, pak je-li

- $f''(x_0) > 0$, je f v bodě x_0 ryze konvexní,
- $f''(x_0) < 0$, je f v bodě x_0 ryze konkávní.

Věta

Je-li funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$ a má-li v intervalu $\langle a, b \rangle$ druhou derivaci

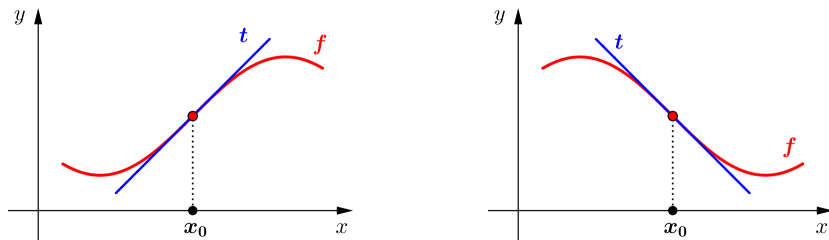
- $f''(x) > 0$, pak je funkce f **konvexní na intervalu $\langle a, b \rangle$** ,
- $f''(x) < 0$, pak je funkce f **konkávní na intervalu $\langle a, b \rangle$** .

3.8 Funkce konvexní a konkávní, inflexní body

FAST

Definice

Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 **inflexní bod**, jestliže v x_0 existuje tečna ke grafu funkce f a f'' mění v x_0 znaménko, tj. funkce se v x_0 mění z konvexní na konkávní, nebo obráceně.

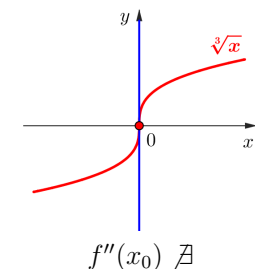
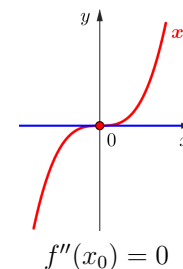


3.8 Funkce konvexní a konkávní, inflexní body

FAST

Pro inflexní bod x_0 funkce f platí:

- $f''(x_0) = 0$, nebo
- $f''(x_0)$ neexistuje.



3.8 Funkce konvexní a konkávní, inflexní body

Příklad 3.13

Určete intervaly konvexnosti a konkávnosti a inflexní body funkce $f(x) = x \ln(x - 1)$.

3.9 Asymptoty grafu funkce

Definice (Asymptota bez směrnice)

Přímka

$$x = x_0$$

se nazývá **asymptota bez směrnice** funkce f v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, jestliže má funkce f v bodě x_0 alespoň jednu jednostrannou limitu nevlastní, tj.

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{nebo} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \pm\infty$$

Asymptoty bez směrnice

- nazýváme také **svislé asymptoty**
- mohou být v bodech nespojitosti funkce, tj. v bodech $x_0 \notin D(f)$, nebo na okraji definičního oboru
- jsou rovnoběžné s osou y

3.9 Asymptoty grafu funkce

Definice (Asymptota se směrnicí)

Přímka

$$y = ax + b, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

se nazývá **asymptota se směrnicí** funkce f pro $x \rightarrow \infty$, resp. pro $x \rightarrow -\infty$, právě tehdy, když

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax]$$

resp.

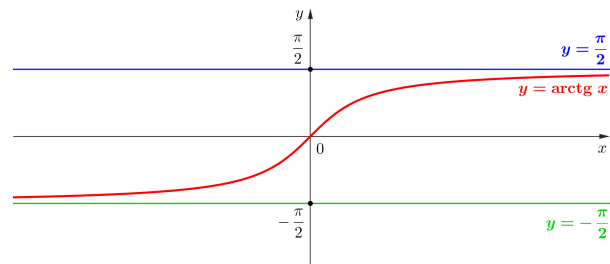
$$a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax]$$

3.9 Asymptoty grafu funkce

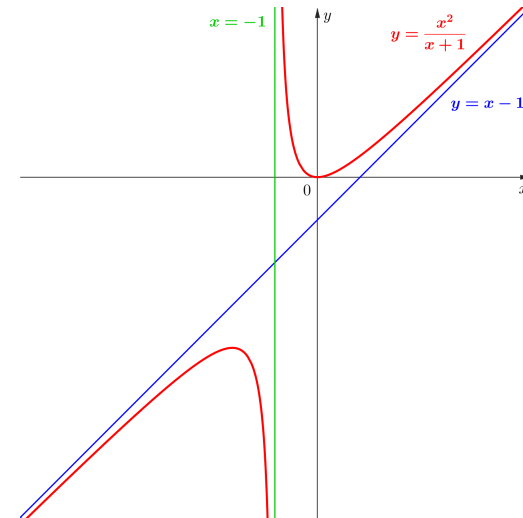
Asymptoty se směrnicí

- pro $a = 0$ nazýváme také **vodorovné asymptoty**
- pro $a \neq 0$ nazýváme také **šikmé asymptoty**
- vodorovné asymptoty $y = b$ jsou rovnoběžné s osou x
- šikmé asymptoty $y = ax + b$ protínají osy x a y
- pokud při výpočtu koeficientů a, b jedna z limit **neexistuje nebo je nevlastní**, pak funkce asymptotu se směrnicí **nemá**

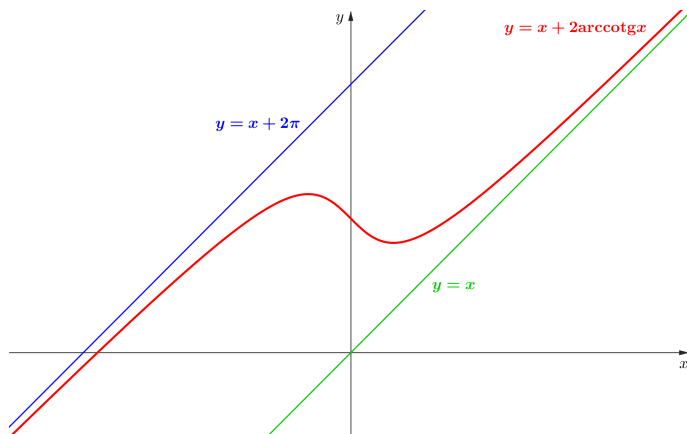
3.9 Asymptoty grafu funkce



3.9 Asymptoty grafu funkce



3.9 Asymptoty grafu funkce



3.9 Asymptoty grafu funkce

Příklad 3.14

Určete asymptoty funkce $f(x) = \frac{6x^2 + 2}{2x - 1}$.

1. **Z předpisu funkce:** $D(f)$, znaménko funkce, průsečíky grafu s osami, sudost / lichost, periodičnost
2. **Z první derivace:** rostoucí a klesající, lokální extrém
3. **Z druhé derivace:** konvexní a konkávní, inflexní body
4. **Asymptoty:** se směrnicí a bez směrnice
5. **Graf:** ke všem výše zmíněným bodům dopočítáme funkční hodnoty a zkombinujeme zjištěné informace

Příklad 3.15



Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.